METODE NUMERICE ÎN INGINERIE

DERIVAREA NUMERICĂ

DERIVAREA NUMERICĂ

Derivarea numerică

Derivarea numerică se folosește atunci când nu se cunoaște expresia analitică a funcției f(x) supusă acestei operații.

Derivata unei funcții reprezintă viteza de variație a funcției f în raport cu variabila x. Derivata este raportul dintre variația funcției f(x) (notată cu df(x)) și variația lui x (notată dx):

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \qquad (1)$$

DERIVAREA NUMERICĂ

Derivarea numerica folosind definitia aproximarii derivatei

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (2)$$

Expresia aproximarii derivatei se obtine renuntand la limita in conditiile in care cresterea h este suficient de mica:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{pentru } h > 0 \qquad (3)$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad \text{pentru } h < 0 \qquad (4)$$

DERIVAREA NUMERICĂ

Interpretarea geometrică a derivatei într-un punct este panta tangentei la graficul funcției în punctul considerat:

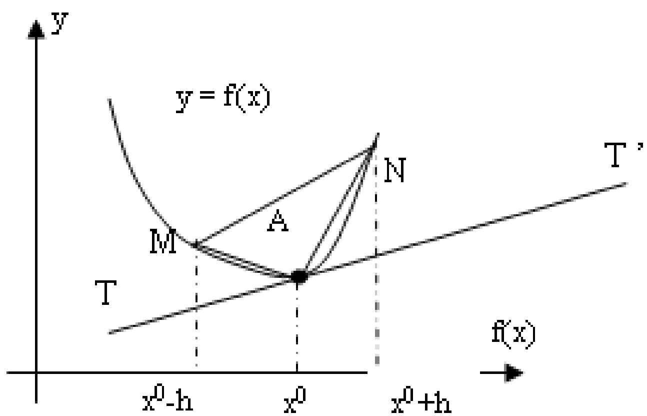


Fig. 1. Interpretarea geometrică a derivatei funcției f(x)

O buna aproximare a tangentei TT', din punct de vedere al pantei o reprezinta secanta MN:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \qquad (5)$$

DERIVAREA NUMERICĂ

Derivatele de ordin superior se pot aproxima in mod asemanator:

$$f''(x_0) \cong \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{2h} = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0) + f(x_0-2h)}{4h^2} \qquad (6)$$

Evaluarea erorii de trunchiere se poate realiza prin dezvoltarea in serii Taylor a functiilor $f(x_0+h)$ si $f(x_0-h)$ in jurul punctului x_0:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(\varepsilon_1) \quad \varepsilon_1 \in (x_0, x_0+h) \qquad (7)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - h\cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(\varepsilon_2) \quad \varepsilon_2 \in (x_0-h, x_0) \qquad (8)$$

DERIVAREA NUMERICĂ

Prin scaderea termen cu termen a relatiilor (7) si (8) si separarea derivatelor de ordinul I, se obtine:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}\,\frac{f'''(\varepsilon_1)+f'''(\varepsilon_2)}{2} \qquad (9)$$

Conform teoremei valorii medii exista un punct $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ pentru care $\frac{f'''(\varepsilon_1)+f'''(\varepsilon_2)}{2} = f'''(\varepsilon)$, astfel incat relatia (9) devine:

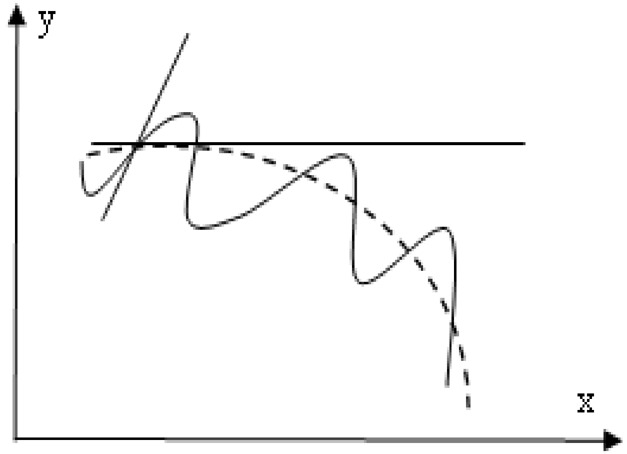
$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\varepsilon) \qquad (10)$$

unde:

$$e_t = \frac{h^2}{6} f'''(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (x_0-h,\ x_0+h) \qquad (11)$$

DERIVAREA NUMERICĂ

O alta sursa de erori in cazul derivarii numerice o reprezinta forma polinomului de interpolare.



DERIVAREA NUMERICĂ

Derivarea numerica folosind polinoame de interpolare Newton

Polinoamele de interpolare Newton folosesc un pas de interpolare h constant:

$$x_k = x_1 + (k-1)h \tag{1}$$

Expresia aproximarii functiei f(x) definita tabelar in cele n+1 noduri de interpolare echidistante x_1, x_2, ..., x_{n+1} este data de relatia:

$$f(x) = f_1 + \frac{\Delta f_1}{1!h}(x-x_1) + \frac{\Delta^2 f_1}{2!h^2}(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + \frac{\Delta^{n+1} f_1}{(n+1)!h^{n+1}}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}) \tag{2}$$

$$f'(x) = \frac{\Delta f_1}{1!h} + \frac{\Delta^2 f_1}{2!h^2}\left[2x-(x_1+x_2)\right] + \frac{\Delta^3 f_1}{3!h^3}\left[3x^2 - 2(x_1+x_2+x_3)x + (x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)\right] + \ldots \tag{3}$$

$$f''(x) = \frac{\Delta^2 f_1}{h^2} + \frac{\Delta^3 f_1}{3!h^3}\left[6x - 2(x_1+x_2+x_3)\right] + \ldots \tag{4}$$

DERIVAREA NUMERICĂ

Aprecierea erorilor de derivare se face pornind de la expresia erorii de aproximare a functiei f(x) printr-un polinom Newton:

$$e_N(x) = \frac{\Delta^{n+1} f_1}{h^{n+1}(n+1)!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n+1}) \qquad (5)$$

Eroarea de aproximare a derivatei va fi:

$$e'_N(x) = \frac{d}{dx}(e_N(x)) \qquad (6)$$

Daca se dace notatia $x = x_1 + th$, rezulta:

$$t = \frac{x-x_1}{h} \Rightarrow x - x_k = x_1 + t \cdot h - x_1 - k \cdot h = h(t-k) \qquad (7)$$

DERIVAREA NUMERICĂ

Cu notatiile (7) expresia (5) devine:

$$e_N(x) \to e_N(t) = \frac{\Delta^{n+1} f_1}{(n+1)!} t(t-1)(t-2)\ldots\ldots(t-n) \qquad (8)$$

Relatia (8) permite calculul erorii de aproximare a derivatei:

$$e'_N(x) = \frac{d}{dx}(e_N(x)) = \frac{d}{dt}\left(e_N(t)\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}\left(e_N(t)\right) = (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} f_1}{h(n+1)} \qquad (9)$$

Expresia (9) evidentiaza dependenta erorii de numarul de noduri de interpolare sugerand o mbunatatire a erorii la cresterea lui n.

$$\boxed{e'_N(x) = (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} f_1}{L} \frac{n}{n+1}} \qquad (10)$$